

Tentamen Algebra 1, 16 juni 2011

Motiveer steeds je antwoord en noem de stellingen die je gebruikt. Je mag de syllabus, boeken en aantekeningen gebruiken, maar het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan. Je mag zonder bewijs gebruiken dat 2011 een priemgetal is en dat geldt $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$.

Opgave 1

a) Laat zien dat het getal

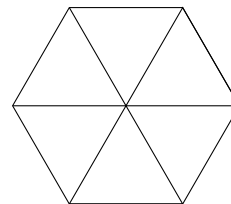
$$2011^{2011^{2011}} - 2011$$

deelbaar is door $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 30030$.

b) Bereken de rest bij deling van $2011^{2011^{2011}}$ door 221 ($= 13 \cdot 17$).

Opgave 2

In het Boliviaanse dorpje Manteles maakt men zeshoekige tafelkleden door zes gelijkzijdige driehoeken van de kleuren rood, geel of groen aan elkaar te naaien. Mantelese tafelkleden hebben geen specifieke onder- of bovenkant. We noemen twee tafelkleden hetzelfde als ze door draaien en/of omkeren in elkaar over te voeren zijn. Hoeveel echt verschillende Mantelese tafelkleden kan men maken?



Opgave 3

a) Wat is het kleinste positieve gehele getal n waarvoor de permutatiegroep S_n een element bevat van orde 6?

b) Wat is het kleinste positieve gehele getal n waarvoor de permutatiegroep S_n een element bevat van orde $16 \cdot 6 \cdot 2011$?

Opgave 4

a) Hoeveel homomorfismen zijn er van C_6 naar S_5 ?

b) Hoeveel homomorfismen zijn er van S_5 naar C_6 ?

Opgave 5

Zij $F = \mathbb{F}_{2011} = \mathbb{Z}/2011\mathbb{Z}$ het lichaam van 2011 elementen. Zij $F^* = F \setminus \{0\}$ de multiplicatieve groep van alle elementen ongelijk aan 0. We schrijven F^{*2} voor de ondergroep van F^* bestaande uit alle kwadraten.

a) Laat zien dat F^*/F^{*2} een cyclische groep van orde 2 is.

Zij $G = \text{GL}_2(F)$ de groep van alle inverteerbare matrices met coëfficiënten in F (met de gebruikelijke vermenigvuldiging als groepsoperatie). Zij $H \subset G$ de deelverzameling van alle matrices waarvan de determinant een kwadraat is, dus

$$H = \left\{ M \in G : \det M \in F^{*2} \right\}.$$

b) Bewijs dat H een normale ondergroep van G is en dat G/H een cyclische groep is.

Cijfers staan vanavond of morgen in de gebruikelijke cijferlijst.